Exercice 1:

1) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$f_x(x,y) = (1+x-y)(1+x^2+y^2)^{-1/2}$$

- $f'_x(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} 2x (1+x^2+y^2)^{-3/2}(1+x-y)$

$$= (1+x^2+y^2)^{-3/2}\left[1-x+y^2+xy\right]$$

- $f'_y(x,y) = -(1+x^2+y^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}.2y(1+x^2+y^2)^{-3/2}(1+x-y)$

$$= (1+x^2+y^2)^{-3/2}\left[-1-x^2-y-xy\right]$$

- $f''_{xx}(x,y) = -\frac{3}{2}(1+x^2+y^2)^{-5/2}.2x(1-x+y^2+xy)$
$$+(1+x^2+y^2)^{-3/2}(-1+y)$$
$$=(1+x^2+y^2)^{-5/2}\left[-1-3x+y+2x^2-y^2 -2x^2y-3xy^2+y^3\right]$$

- $f''_{yy}(x,y) = -\frac{3}{2}(1+x^2+y^2)^{-5/2}(2y)(-1-x^2-y-xy)$
$$+(1+x^2+y^2)^{-3/2}(-1-x)$$
$$=(1+x^2+y^2)^{-5/2}\left[-1-x+3y-x^2+2y^2 +3x^2y+2xy^2-x^3\right]$$

- $f''_{xy}(x,y) = -\frac{3}{2}(2x)(1+x^2+y^2)^{-5/2}(-1-x^2-y-xy)$
$$+(1+x^2+y^2)^{-3/2}(-2x-y)$$
$$=(1+x^2+y^2)^{-5/2}\left[x-y+x^3-y^3+3xy -2xy^2+2x^2y\right]$$

2) $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x+y^2+xy=0 & (1) \\ -1-x^2-y-xy=0 & (2) \end{cases}$

$(1)+(2) \Rightarrow -x-y+y^2-x^2=0$
$\Rightarrow -(x+y)+(y-x)(y+x)=0$
$\Rightarrow (y+x)(-1-x+y)=0$
$\Rightarrow y=-x$ ou $y=x+1$

Le système précédent équivaut à:

$\begin{cases} -1-x^2-(-x)-x(-x)=0 \\ y=-x \end{cases}$

ou

$\begin{cases} -1-x^2-(x+1)-x(x+1)=0 \\ y=x+1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=1 \\ y=-x \end{cases}$ ou $\begin{cases} -2x^2-2x-2=0 \\ y=x+1 \end{cases}$ $\Delta<0$ ↳ impossible

$\iff \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Conclusion:
La fonction f admet donc un seul point critique donné par : $A(1\,;-1)$

3) Condition du 2^e ordre :

Posons $D(x,y)=\left[f''_{xy}(x,y)\right]^2-\left[f''_{xx}(x,y)\right]\left[f''_{yy}(x,y)\right]$

au point $A(1,-1)$ on a:

- $f''_{xx}(1,-1) = 3^{-5/2}(-1-3-1+2-1+2-3-1) = -6.3^{-5/2}$
- $f''_{yy}(1,-1) = 3^{-5/2}(-1-1-3-1+2-3+2-1) = -6.3^{-5/2}$
- $f''_{xy}(1,-1) = 3^{-5/2}(1+1+1+1-3-2-2) = -3.3^{-5/2}$

2) $\forall t \in \mathbb{R}^*$ on a :

- $x'(t) = \frac{1}{4}\left(-2t^{-3} - 2\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1+t^3}{t^3}\right)$
- $y'(t) = \frac{1}{4}\left(-2t^{-3} + 16\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-8t^3}{t^3}\right)$
- $x''(t) = \frac{6}{4}t^{-4} = \frac{3}{2t^4}$
- $y''(t) = \frac{6}{4}t^{-4} = \frac{3}{2t^4}$

3) * $1+t^3 > 0 \iff t > -1$

* $1-8t^3 > 0 \iff (2t)^3 < 1$
$\iff t < \frac{1}{2}$

On en déduit les variations de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$:

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	||	$-$		$-$	
x	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{15}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

4) Points singuliers ?

$\det\left(\vec{F}'(t) ; \vec{F}''(t)\right) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}^*)$

$\iff \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$

$\iff \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\left(\frac{1+t^3}{t^3}\right) & \frac{3}{2t^4} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1-8t^3}{t^3}\right) & \frac{3}{2t^4} \end{vmatrix} = 0$

$\iff \begin{vmatrix} 1+t^3 & 1 \\ 1-8t^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 1+t^3 - 1 + 8t^3 = 0$

$\iff t = 0$: inacceptable !

Concl : (C) n'admet pas de point singulier.

5) intersection avec les axes :

* avec l'axe (Ox) :

$\cdot\ y(t) = 0 \iff \frac{1}{t^2} + 16t = 0$

$\iff 16t^3 + 1 = 0$

$\iff t^3 = -\frac{1}{16}$

$\iff t = -\frac{1}{\sqrt[3]{16}} = -\frac{1}{2.\sqrt[3]{2}}$

$\cdot\ x\left(-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(4.2^{2/3} + \frac{1}{2^{1/3}}\right) = \frac{9}{4.\sqrt[3]{2}}$

$\simeq 1{,}78$

$\Rightarrow$ (C) coupe l'axe des x au point $\left(\frac{9}{4\sqrt[3]{2}} ; 0\right) \simeq (1{,}78 ; 0)$

* avec l'axe (Oy) :

$\cdot\ x(t) = 0 \iff \frac{1}{t^2} - 2t = 0$

$\iff 2t^3 = 1$

$\iff t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\cdot\ y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(2^{2/3} + \frac{16}{2^{1/3}}\right) = \frac{18}{4\ 2^{1/3}} = \frac{9}{2.\sqrt[3]{2}}$

$\simeq 3{,}57$

$\Rightarrow$ (C) coupe l'axe des y au point $\left(0 ; \frac{9}{2.\sqrt[3]{2}}\right) \simeq (0 ; 3{,}57)$

$\mathcal{A}_D = 6\pi$ unités d'aire.

3) $I = \oint_\Gamma \underbrace{-y}_{P(x,y)}\, dx + \underbrace{1}_{Q(x,y)} . dy$

$\begin{cases} \bullet\ P, Q : \text{de classe } C^1 \text{ sur } \Gamma \text{ et à l'intérieur de } \Gamma \\ \bullet\ \Gamma \text{ chemin fermé simple} \end{cases}$

En appliquant le théorème de Green on obtient

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D dx\,dy$$

$$= \mathcal{A}_D$$

$$= 6\pi$$

Remarque :
On peut calculer I directement en utilisant la paramétrisation du chemin Γ : $\begin{cases} x = 2(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y = 2(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} dx = 2\left[\sin\theta\cos\theta - \sin\theta(1-\cos\theta)\right] d\theta \\ dy = 2\left[\sin^2\theta + \cos\theta(1-\cos\theta)\right] d\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} dx = 2\left[2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\right] d\theta \\ dy = 2\left[\sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos\theta\right] d\theta \end{cases}$$

$$I = 2\int_0^\pi -2(1-\cos\theta)\sin\theta \cdot 2\cdot(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta + 2(\sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos\theta)\,d\theta$$

$$= 4\int_0^\pi \left[(-2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta) + \sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos\theta\right] d\theta$$

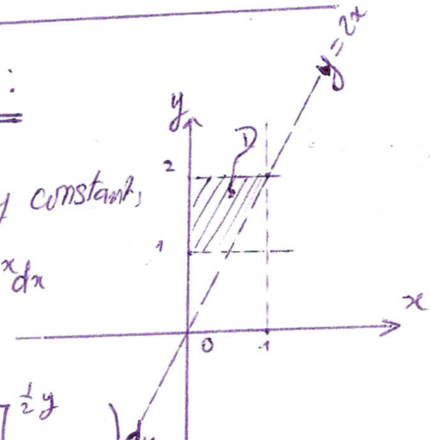
$$= 4\int_0^\pi \left[-6\sin^2\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta - \cos\theta\right] d\theta$$

$$= 4\int_0^\pi \left[-6\sin^2\theta\cos\theta + \frac{3}{2} - 2\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta - \cos\theta\right] d\theta$$

$$= 4\left[-2\sin^3\theta + \frac{3}{2}\theta - \sin 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta - \sin\theta\right]_0^\pi$$

$$= 6\pi$$

Exercice 4 :



a) coupe à y constant,

$$I = \int_1^2 y\,dy \int_0^{\frac{1}{2}y} e^{-x}\,dx$$

$$= \int_1^2 y\left(-\left[e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}y}\right) dy$$

$$= -\int_1^2 y\left(e^{-\frac{1}{2}y} - 1\right) dy$$

intég par parties:
$u = y \qquad v' = e^{-\frac{1}{2}y} - 1$
$u' = 1 \qquad v = -2e^{-\frac{1}{2}y}$

$$I = 2\left[ye^{-\frac{1}{2}y}\right]_1^2 - 2\int_1^2 e^{-\frac{1}{2}y}\,dy$$

$$= 2\left[ye^{-\frac{1}{2}y}\right]_1^2 + 4\left[e^{-\frac{1}{2}y}\right]_1^2$$

$$= 2\left[2e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}\right] + 4\left[e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 8e^{-1} - 6e^{-\frac{1}{2}}$$

Passons aux coordonnés elliptiques:
$$\begin{cases} x = 3r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \end{cases}$$

• Jacobien : $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 3\cos\theta & -3r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 6r$

• Sur D : $\begin{cases} \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi \\ r \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \end{cases}$

$$K = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r\cos\theta - 2r\sin\theta)\, 6r\, dr$$
$$= \int_0^{2\pi} (3\cos\theta - 2\sin\theta)\, d\theta \int_0^1 6r^2\, dr$$
$$= \Big[3\sin\theta + 2\cos\theta\Big]_0^{2\pi} \Big[2r^3\Big]_0^1$$
$$= \big[2 - 2\big]\big[2 - 0\big]$$
$$= 0$$

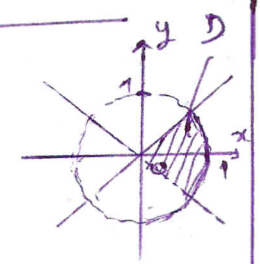
Autre méthode:
coupe à x constant:
$$K = \int_{-3}^{3} dx \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} (x-y)\, dy$$
$$= \int_{-3}^{3} \left(\left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} \right) dx$$
$$= \int_{-3}^{3} \Big(\underbrace{4x\sqrt{1-\tfrac{x^2}{9}}}_{\text{impaire}} \Big) dx$$
$$= 0$$

d) $$L = \int_0^1 x\, dx \int_x^1 y\, dy \int_y^1 z\, dz$$
$$= \int_0^1 x\, dx \int_x^1 y\, dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_y^1$$

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 x\, dx \int_x^1 y(1-y^2)\, dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_x^1 \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right) dx$$
$$= \frac{1}{8} \int_0^1 \left(x - 2x^3 + x^5 \right) dx$$
$$= \frac{1}{8} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right]$$
$$= \frac{1}{48}$$

Exercice 5:

$|y| < x \iff \begin{cases} x > 0 \\ -x < y < x \end{cases}$



■ aire de D : $A_D = ?$

$$A_D = \iint_D dx\, dy$$

Passons aux coord polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$A_D = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r\, dr$$
$$= \Big[\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\pi}{4} \text{ unités d'aire.}$$

■ centre de gravité: G ?

* $y_G = 0$ par symétrie
* $x_G = \dfrac{1}{A_D} \iint_D x\, dx\, dy$

Autre méthode :

$V = V_3 - V_4$

où • V_3 = volume de la demi-sphère Ω_3

$= \frac{2}{3}\pi . 2^3 = \frac{16\pi}{3}$

• V_4 = volume de la région Ω_4 limitée par le cylindre et la demi-sphère

$= \iiint_{\Omega_4} dx\,dy\,dz$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2} r^2 dr$

* Sur le cylindre : $x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow r^2\sin^2\theta = 1$
$\Leftrightarrow r = \frac{1}{\sin\theta}$

* sur la sphère : $x^2+y^2+r^2=1 \Leftrightarrow r = 1$

$V_4 = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(8 - \frac{1}{\sin^3\theta}\right)d\theta$

$= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(8\sin\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)d\theta$

$= \frac{2\pi}{3}\left[-8\cos\theta + \mathrm{cotan}\,\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{2\pi}{3}\left[4\sqrt{3} - \sqrt{3}\right]$

$= 2\pi\sqrt{3}$

$\Rightarrow V = \frac{16\pi}{3} - 2\pi\sqrt{3}$ unités de volume

Exercice 7 :

1) • $AB = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\4&4&3\end{pmatrix}$

• $AC = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\4&4&3\end{pmatrix}$

• On constate que $AB = AC$.
Si A était inversible cela voudrait dire que $B = C$.
Ce qui est faux !
On en déduit que A n'est pas inversible.

2) • $\det(C) = \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&-1&-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&-1&-1\end{vmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$= -2+1$

$= -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ C est inversible.

• Matrice des cofacteurs de C :
$Co(C) = (\Delta_{ij})$

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix}2&1\\-1&-1\end{vmatrix} = -1$ $\quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix} = 1$ $\quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix} = -1$

$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix} = 0$ $\quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix} = -1$ $\quad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix} = -1$ $\quad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} = 0$ $\quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} = 1$

$\Rightarrow Co(C) = \begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$$x_G = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r\cos\theta \, r\,dr$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta \int_0^1 r^2\,dr$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/4}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

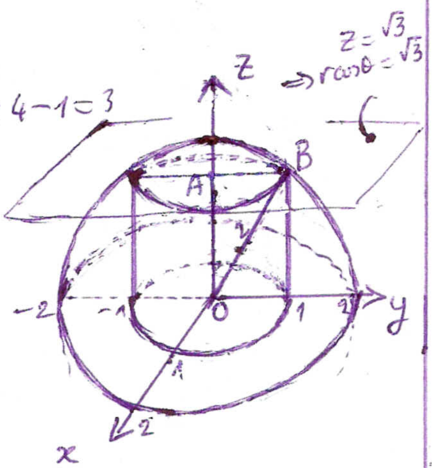
$$\Rightarrow \quad G\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\ ;\ 0\right)$$

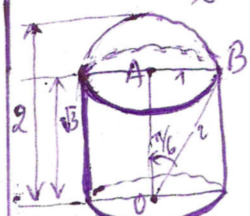
Exercice 6 :

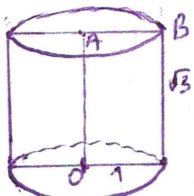
• $OA^2 = OB^2 - AB^2 = 4-1 = 3$

$\Rightarrow OA = \sqrt{3}$

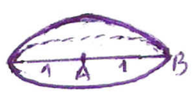
• $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$







cylindre Ω_1



calotte sphérique Ω_2

La région Ω est la réunion du cylindre Ω_1 et de la calotte sphérique Ω_2

■ Volume de Ω_1 : $V_1 =$ aire de base × hauteur

$$= \pi \times 1^2 \times \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}\,\pi$$

■ Volume de Ω_2 :

$$V_2 = \iiint_{\Omega_2} dx\,dy\,dz$$

Passons aux coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Sur Ω_2 : $\begin{cases} \cdot\ \varphi \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi \\ \cdot\ \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{6} \\ \cdot\ r \text{ varie de } \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta} \text{ à } 2 \end{cases}$

$$V_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6}\sin\theta\,d\theta \int_{\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}^{2} r^2\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/6} \sin\theta\left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}^{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/6} \sin\theta\left(8 - \frac{3\sqrt{3}}{\cos^3\theta}\right)d\theta$$

$$\begin{cases} t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\int_1^{\sqrt{3}/2}\left(8 - \frac{3\sqrt{3}}{t^3}\right)dt$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[8t + \frac{3\sqrt{3}}{2t^2}\right]_{\sqrt{3}/2}^{1}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[8 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[8 - \frac{9}{2}\sqrt{3}\right]$$

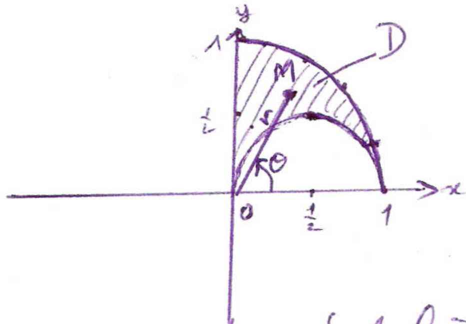
$\Rightarrow$ le volume de Ω est donné par $V = V_1 + V_2$

$$= \sqrt{3}\,\pi + \frac{2\pi}{3}\left(8 - \frac{9}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}\right)\pi \quad \text{unités de volume}$$

b) $x \leq x^2+y^2 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \frac{1}{4}$: extérieur du cercle de centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

$x^2+y^2 \leq 1$: intérieur du cercle de Centre $(0,0)$ et de rayon 1



Passons aux coordonnées polaires :

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Sur D : $\begin{cases} \cdot\ \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } \pi/2 \\ \cdot\ \text{Pour } \theta \text{ fixé } r \text{ varie de } \cos\theta \text{ à } 1 \end{cases}$

* sur le petit cercle : $x = x^2+y^2 \iff r\cos\theta = r^2 \iff r=\cos\theta$ ou $r=0$

* Sur le grand cercle : $x^2+y^2=1 \iff r=1$

$$J = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^{1} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^{1} \frac{-2r\,dr}{(1+r^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\left[\frac{1}{1+r^2}\right]_{\cos\theta}^{1}\right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\cos^2\theta}\right) d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}A$$

où $A = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta} = ?$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}+1}$$

• $t = \tan\theta$

$dt = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

• $u = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \sqrt{2}u$

$dt = \sqrt{2}u$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{Arctan} u\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

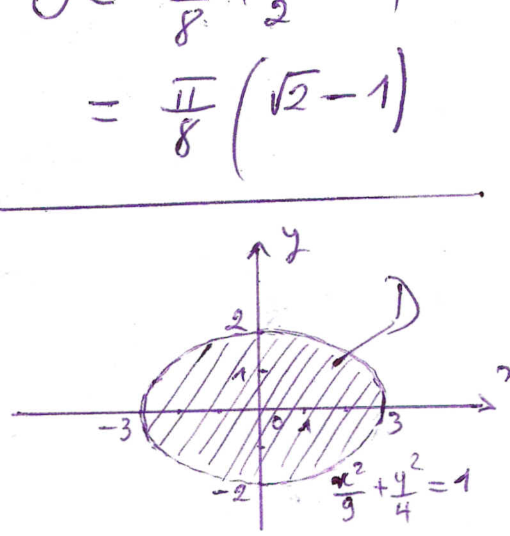
$$= \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow J = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$

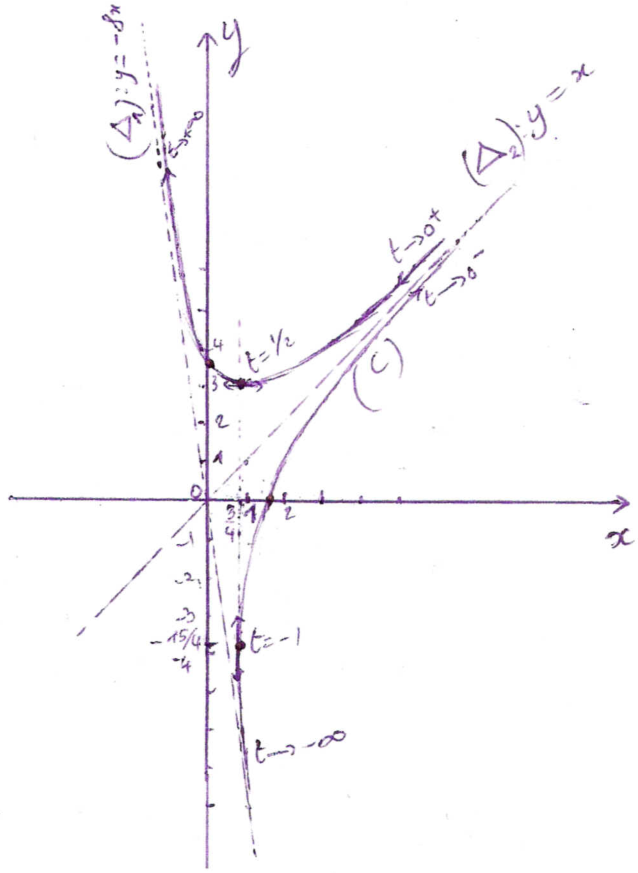
$$= \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

---

c)



Tracé :



Exercice 3 :

1) $\rho(-\theta) = 2(1-\cos(-\theta)) = \rho(\theta)$

$\Rightarrow$ Γ admet l'axe des x comme axe de symétrie

2) Etudions rapidement Γ

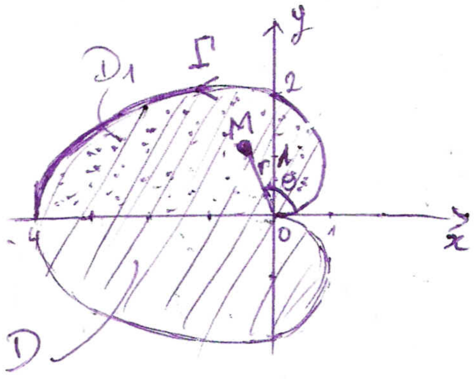
• $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta) \Rightarrow \Gamma$ est 2π-périodique

Donc pour obtenir entièrement Γ il suffit de l'étudier sur $[0,\pi]$ puis d'effectuer la symétrie % à l'axe (Ox).

• $\forall \theta \in [0,\pi] \quad \rho'(\theta) = 2\sin\theta \geqslant 0$

θ	0		π
$\rho'(\theta)$	0	$+$	0
ρ	0	$\nearrow$	4

• Tracé de Γ



Calcul de l'aire de D : A_D

$$A_D = \iint_D dx\,dy = 2\iint_{D_1} dx\,dy$$

Passons aux coordonnées polaires:
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Sur D_1 : $\begin{cases} \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } \pi \\ \text{Pour } \theta \text{ fixé } r \text{ varie de } 0 \text{ à } 2(1-\cos\theta) \end{cases}$

$$\Rightarrow A_D = 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2(1-\cos\theta)} r\,dr$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\left[r^2 \right]_0^{2(1-\cos\theta)} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4(1-\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow D(1,-1) = \left[-3\cdot 3^{-5/2}\right]^2 - \left[-6\cdot 3^{-5/2}\right]\left[-6\cdot 3^{-5/2}\right]$$
$$= 3^{-5/2}\left(9-36\right) < 0$$

Et comme $f''_{xx}(1,-1) = -6\cdot 3^{-5/2} < 0$

On en déduit que f admet un maximum local en $A(1,-1)$

Exercice 2 :

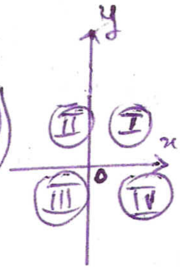
1) $\vec{F}(t) = (x(t)\,;\,y(t))$

- Le domaine de définition de $\vec{F}$ est $D_{\vec{F}} = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$
- Etudes aux bornes du domaine :

* $\boxed{\text{en } -\infty}$

- $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2}-2t\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2}+16t\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{\frac{1}{t^2}+16t}{\frac{1}{t^2}-2t} = -8$
- $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)+8x(t) = \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{4}\left[\frac{9}{t^2}\right] = 0$

Concl. (C) admet la droite $(\Delta_1): y = -8x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ (Cette branche est située dans le quadrant IV)



$\boxed{\text{en } 0}$ $(0^-$ et $0^+)$

- $\lim\limits_{t\to0} x(t) = \lim\limits_{t\to0} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2}-2t\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{t\to0} y(t) = \lim\limits_{t\to0} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2}+16t\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{t\to0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to0} \frac{1+16t^3}{1-2t^3} = 1$
- $\lim\limits_{t\to0} y(t)-x(t) = \lim\limits_{t\to0} \frac{1}{4}\left[18t\right] = 0$

Concl: (C) admet en 0^- et 0^+ la droite d'équation $(\Delta_2): y = x$ comme asymptote oblique. (branches situées dans le quad I)

$\boxed{\text{en } +\infty}$

- $\lim\limits_{+\infty} x(t) = -\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} y(t) = +\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -8$
- $\lim\limits_{+\infty} y(t)+8x(t) = 0$

Concl. (C) admet également la droite $\Delta_1: y = -8x$ comme A.O. au voisinage de $+\infty$ (branche située dans le quad. II)

- Position relative

* entre (C) et (Δ_1)

$y(t)+8x(t) = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{t^2} > 0$

$\Rightarrow$ (C) est située au dessus de (Δ_1)

* entre (C) et (Δ_2) :

$y(t)-x(t) = \frac{9}{2}t$ $\begin{cases} >0 & \text{sur }]0,+\infty[\\ <0 & \text{sur }]-\infty,0[\end{cases}$

$\Rightarrow$ (C) est située au dessus de (Δ_2) sur $]0,+\infty[$, et en dessous sur $]-\infty;0[$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\, {}^t Co(C)$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

---

3) ■ $AX = O$

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$AX = O \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = b = c = 0 \\ d+g = e+h = f+i = 0 \\ 3a+d+g = 3b+e+h = 3c+f+i = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b = c = 0 \\ d+g = e+h = f+i = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b = c = 0 \\ g = -d \\ h = -e \\ i = -f \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}$$

où d, e décrivent $\mathbb{R}$.

■ $CY = B$

$$\iff Y = C^{-1} \cdot B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

4) ■ $(S_1) \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = d \\ z = -d \end{cases}$$ où d est un paramètre réel décrivant $\mathbb{R}$

Concl. L'ensemble des solutions de (S_1) est $\mathcal{S}_1 = \{(0; d; -d) : d \in \mathbb{R}\}$

■ $(S_2) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Concl. l'ens. des sol de (S_2) est $\mathcal{S}_2 = \{(2; -1; 0)\}$

Rque :
la sol générale de (S_1) est donnée par la 1ère colonne de la matrice X
Celle de (S_2) est donnée par la 1ère colonne de la matrice Y.